פתרונות מלאים
מועד ב', סמסטר אביב תשע"ד - 104016
2.10.14

מס. סטודנט: | | | | | | | | | | פקולטה: | |

- משך המבחן : 3 שעות.
- השימוש בחומר עזר כלשהו ובמחשבונים אסור בהחלט.
- רשמו את כל תשובותיכם בדפים אלה. אפשר להשתמש בשני צידי הדף.
- בשאלות 1-4 יש **לנמק** היטב כל תשובה. תשובה לא מנומקת לא תחשב. בשאלות 5-8 יש לסמן את התשובה הנכונה. בכל שאלה יש רק סימון אחד נכון. שאלה שבה ישנם יותר סימונים מהמותר לא תיבדק. **אין לתת נימוקים בשאלות 5-8.** לא יינתנו נקודות על סימון שגוי.
- סך הנקודות במבחן הוא 101 אך הציון הסופי לא יעלה על 100.
- שאלת שיעורי הבית היא שאלה 4.

ב ה צ ל ח ה !

טבלה לסימון תשובות נכונות בשאלות 5-8:

	שאלה מס' 5	שאלה מס' 6	שאלה מס' 7	שאלה מס' 8
א.				
ב.				
ג.				
ד.				
ה.				

לבודקים: יש לרשום את הציונים בדף השער.

שאלה מס' 1 : (20 נקודות)

יהי $R^{2\times 2}$ מרחב המטריצות הממשיות מסדר 2×2 מעל R, ויהי $R_2\left[x\right]$ מרחב הפולינומים הממשיים ממעלה קטנה או שווה ל- 2. תהי $T:R_2\left[x\right]\to R^{2\times 2}$ ההעתקה הלינארית המוגדרת ע"י:

$$T\left(p(x)\right)=\begin{pmatrix} p(1) & p(0) \\ p(-1) & p(0) \end{pmatrix}$$

א. (5 נק') מצאו בסיס ומימד לגרעין של T.

ב. (5 נק') מצאו בסיס לתמונה של T כך שבבסיס זה תהיה לפחות מטריצה הפיכה אחת.

ג. (5 נק') מצאו בסיס לתת מרחב U של $R^{2\times 2}$ כך שמתקיים: $R^{2\times 2}=U+\operatorname{Im}T$ אבל $R^{2\times 2}\neq U\oplus\operatorname{Im}T$ (כלומר שהסכום הוא **לא** סכום ישר).

ד. (5 נק') הוכח או הפרך: קיימת העתקה לינארית $S:R^{2\times 2}\to R_2\left[x\right]$ כך ש $T\circ S=I$ (כאן I היא העתקת הזהות על $R^{2\times 2}$).

פתרון שאלה מס' 1 :

נסמן איבר כללי ב- $R_2\left[x\right]$ כ $p(x)=a+bx+cx^2$ ונקבל:

$$T\left(p(x)\right)=T(a+bx+cx^2)=\begin{pmatrix} a+b+c & a \\ a-b+c & a \end{pmatrix}$$

עתה נפתור את סעיפי השאלה:

א. הגרעין:

$$T(a+bx+cx^2)=\begin{pmatrix} a+b+c & a \\ a-b+c & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ a=0 \\ a-b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b+c=0 \\ -b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow \operatorname{Ker}T=\{0\}$$

מכאן כי בסיס לגרעין הוא קבוצה ריקה ו- $\dim(\operatorname{Ker}T)=0$.

ב. תחילה נבחין כי על פי משפט המימדים השני נקבל כי:

$$\dim(\operatorname{Im}T)=\dim(R_2[x])-Dim(\operatorname{Ker}T)=3-0=3$$

איבר כללי בתמונה הוא: $\begin{pmatrix} a+b+c & a \\ a-b+c & a \end{pmatrix}$. נוציא סקלרים לקבלת קבוצה פורשת אשר ממנה נסיק בסיס כלשהו לתמונה:

$$\begin{pmatrix} a+b+c & a \\ a-b+c & a \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

קיבלנו שהתמונה נפרשת ע"י 3 מטריצות. ראינו קודם כי מימד התמונה הוא 3 לכן על פי משפט (אם מ"ו הוא ממימד n אז כל n פורשים הם בסיס) הקבוצה הנ"ל מהווה בסיס לתמונה, כלומר בסיס כלשהו לתמונה הוא:

$$\left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\right\}$$

ניתן לראות כי בבסיס זה כל המטריצות הן מדרגה 1. דרישת השאלה היא שבבסיס תהייה לפחות מטריצה הפיכה אחת כלומר לפחות מטריצה אחת מדרגה 2 (כי המטריצות הן מסדר 2×2). נחליף את המטריצה הראשונה בבסיס במטריצה המתקבלת מסכום המטריצה הראשונה והשנייה, ונקבל את הקבוצה:

$$\left\{\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\right\}$$

עתה המטריצה הראשונה בקבוצה שקיבלנו היא הפיכה (מדרגה 2) ובנוסף 3 המטריצות הנ"ל בלתי תלויות לינארית (בדקו ע"י דרוג הקואורדינטות) ומכיוון שמימד התמונה 3 הרי שזהו בסיס לתמונה המקיים את התנאי הדרוש.

ג. ניקח את הבסיס לתמונה שמצאנו ונשלים אותו לבסיס של המרחב כולו ע"י הוספת המטריצה $\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$. נבדוק תחילה כי הקבוצה החדשה היא אכן בסיס למרחב כולו כלומר ל- $R^{2\times 2}$ ע"י בדיקת תלות בין הקואורדינטות לפי הבסיס הסטנדרטי של $R^{2\times 2}$:

$$\begin{pmatrix}2&1&0&1\\1&0&-1&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\underset{\substack{R_2\to 2R_2-R_1\\R_3\to 2R_3-R_1}}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}2&1&0&1\\0&-1&-2&-1\\0&-1&2&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\underset{R_3\to R_3-R_2}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}2&1&0&1\\0&-1&-2&-1\\0&0&4&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

קיבלנו מטריצה מדורגת מדרגה 4 כלומר 4 המטריצות הנ"ל הן בלתי תלויות לינארית במרחב ממימד 4 ולכן קבוצה זו מהווה בסיס ל $R^{2\times 2}$.

נסמן ב- W את המרחב הנפרש ע"י המטריצה $\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ שהוספנו ונשים לב כי $\dim W=1$, לכן לפי משפט המימדים הראשון נקבל כי:

$$\dim(\operatorname{Im}T\cap W)=\dim\operatorname{Im}T+\dim W-\dim R^{2\times 2}=3+1-4=0$$

כלומר $R^{2\times 2}=U\oplus\operatorname{Im}T$. כדי שהסכום לא יהיה ישר, נותר להוסיף לבסיס של W מטריצה השייכת גם ל- $\operatorname{Im}T$ וכך נבטיח כי $\dim(\operatorname{Im}T\cap W)\neq 0$. נבחר למשל: $W=sp\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\right\}$. עתה, $\dim W=2$, $\dim(\operatorname{Im}T\cap W)=1$ ולפי משפט המימדים הראשון מתקיים:

$$\dim(\operatorname{Im}T+W)=\dim\operatorname{Im}T+\dim W-\dim(\operatorname{Im}T\cap W)=3+2-1=4$$

וקיבלנו כי $R^{2\times 2}=U+\operatorname{Im}T$ אבל הסכום לא ישר כי $\dim(\operatorname{Im}T\cap W)\neq 0$.

הערה: במבחן אפשר היה להסתפק בהסבר קצר יותר...

ה. תחילה נבחין כי $T\circ S:R^{2\times 2}\to R^{2\times 2}$. כדי שהעתקה זו תהייה העתקת הזהות על התמונה להיות כל $R^{2\times 2}$ ולכן על מימד התמונה להיות 4. יהי $u\in\operatorname{Im}(TS)$ אז קיים $v\in R^{2\times 2}$ $T\circ S(v)=T(S(v))=u$.

נסמן: $S(v)=w$ ונקבל: $u=T(S(v))=T(w)$ כלומר $u\in\operatorname{Im}T$.

קיבלנו כי אם $u\in\operatorname{Im}(TS)$ אז $u\in\operatorname{Im}T$ כלומר $\operatorname{Im}(TS)\subset\operatorname{Im}T$ ומכאן כי $\dim(\operatorname{Im}(TS))\le\dim(\operatorname{Im}T)=3<4$ לכן העתקה S כזו לא קיימת.

שאלה מס' 2 : (30 נקודות)

יהי $T: R^{2\times 2} \to R^{2\times 2}$ האופרטור הלינארי המוגדר ע"י :

$$T(A) = 2A + 3A^{t}$$

ויהי E הבסיס הסדור הסטנדרטי של $R^{2\times 2}$: $E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

א. (5 נק') מצאו את $[T]_E$, המטריצה המייצגת את T לפי הבסיס E.

ב. (5 נק') מצאו את הפולינום האופייני של T.

ג. (5 נק') מצאו את כל הערכים העצמיים של T, וכן את הריבוי האלגברי והריבוי הגיאומטרי של כל ערך עצמי.

ד. (9 נק') האם קיים בסיס B של $R^{2\times 2}$ כך ש $[T]_B$ (המטריצה המייצגת את T ביחס לבסיס B) היא אלכסונית? אם כן, מצאו בסיס B כזה וכן מצאו את $[T]_B$. אם לא קיים בסיס כזה, נמקו מדוע.

ה. (6 נק') נסמן ב- λ_1 את הערך העצמי הקטן ביותר של T וב- λ_2 את הערך העצמי הגדול ביותר של T. הוכח שאם המטריצה A היא וקטור עצמי של λ_1 אז A^2 היא וקטור עצמי של λ_2.

פתרון שאלה מס' 2 :

נסמן איבר כללי ב- $R^{2\times 2}$ ע"י $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ אז

$$T(A) = 2A + 3A^{t} = 2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a & 2b+3c \\ 2c+3b & 5a \end{pmatrix}$$

עתה נענה על סעיפי השאלה :

א. מאחר והבסיס E הוא הבסיס הסטנדרטי של $R^{2\times 2}$ הרי ש :

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

ב. נמצא פולינום אופייני :

$$\left|\lambda I - [T]_E\right| = \begin{vmatrix} \lambda-5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-5)^2 \begin{vmatrix} \lambda-2 & -3 \\ -3 & \lambda-2 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda-5)^2(\lambda^2-4\lambda+4-9) = (\lambda-5)^2(\lambda^2-4\lambda-5) = (\lambda-5)^2(\lambda-5)(\lambda+1) = (\lambda-5)^3(\lambda+1)$$

ג+ד. בסעיף זה נמצא גם ריבוי גיאומטרי וגם בסיס למרחב העצמי של כל ערך עצמי לכן נענה על שני הסעיפים יחד.

מהפולינום האופייני שקיבלנו נובע כי $\lambda_1 = 5$ הוא ערך עצמי מריבוי אלגברי 3 ו- $\lambda_2 = -1$ הוא ערך עצמי מריבוי אלגברי 1.

נמצא ריבוי גיאומטרי ובסיס למרחב העצמי של כל ערך עצמי:

$\lambda_1 = 5$: יש לפתור את המערכת $\left(5I - [T]_E\right)\bar{x} = 0$:

$$\left(5I - [T]_E\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b - c = 0 \;\Rightarrow\; b = c$$

$$V_{\lambda_1=5} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, b = c \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \middle| \, a, b, d \in R \right\}$$

נשים לב כי המרחב העצמי של $\lambda_1 = 5$ הוא מרחב המטריצות הסימטריות מסדר 2×2 ובסיס הוא למשל (המתקבל מהוצאת סקלרים באיבר הכללי ובדיקת אי תלות של הקבוצה הפורשת המתקבלת):

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

מכאן כי הריבוי הגיאומטרי של $\lambda_1 = 5$ הוא 3 השווה גם לריבוי האלגברי שלו. נשים לב כי המרחב העצמי של $\lambda_1 = 5$ הוא מרחב המטריצות הסימטריות מסדר 2×2.

$\lambda_2 = -1$: יש לפתור את המערכת $\left(-I - [T]_E\right)\bar{x} = 0$ או (ע"י כפל ב -1) $\left(I + [T]_E\right)\bar{x} = 0$:

$$\left(I + [T]_E\right) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b + c = 0 \\ d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -c \\ d = 0 \end{cases}$$

$$V_{\lambda_2=-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \middle| \, b \in R \right\}$$

נשים לב כי המרחב העצמי של $\lambda_2 = -1$ הוא מרחב המטריצות האנטי סימטריות מסדר 2×2 ובסיס הוא למשל (המתקבל מהוצאת סקלרים באיבר הכללי ובדיקת אי תלות של הקבוצה הפורשת המתקבלת):

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

כצפוי, הריבוי הגיאומטרי של $\lambda_2 = -1$ הוא 1 השווה גם לריבוי האלגברי שלו.

קיבלנו כי לכל ערך עצמי של T הריבוי האלגברי שווה לריבוי הגיאומטרי שלו ולכן T לכסין כלומר קיים בסיס B של $R^{2\times 2}$ המורכב כולו מווקטורים עצמיים של T וכך ש- $[T]_B$ אלכסונית:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad , \quad [T]_B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ה. על פי התוצאות שקיבלנו בסעיפים קודמים הערך העצמי הקטן ביותר הוא -1 והערך העצמי הגדול ביותר הוא 5. וקטור עצמי של -1 הוא מטריצה מהצורה $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ נעלה בריבוע ונקבל:

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a^2 & 0 \\ 0 & -a^2 \end{pmatrix} = -a^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

קיבלנו צרוף לינארי של מטריצה שהיא וקטור עצמי של הערך העצמי 5 ולכן היא וקטור עצמי של 5.

נימוק אחר:

כאמור, הווקטורים העצמיים של -1 הן מטריצות אנטי סימטריות ושל הערך העצמי 5 הן מטריצות סימטריות. ידוע כי אם לוקחים מטריצה אנטי סימטרית ומעלים אותה בחזקה זוגית מתקבלת מטריצה סימטרית ולכן נובעת התוצאה המבוקשת.

שאלה מס' 3 : (21 נקודות)

הוכיחו את הטענות הבאות:

א. (7 נק') יהיו A ו- B שתי מטריצות ממשיות וריבועיות מאותו סדר המקיימות $AB=0$ אז $(BA)^2=0$.

ב. (7 נק') תהי A מטריצה ממשית מדרגה 1 ומסדר $n\times n$, $n>1$. אם A לכסינה, אז $trace(A)\neq 0$.

ג. (7 נק') יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל R, ויהיו $u,v\in V$. הווקטורים u,v אורתוגונליים אם"ם $\|u+v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2$.

פתרון שאלה מס' 3:

א. נעזר באסוציאטיביות של כפל מטריצות ובנתון ונקבל:

$$(BA)^2=(BA)(BA)=B(AB)A=(B\cdot 0)\cdot A=0\cdot A=0$$

ב. נתון ש- A מסדר $n\times n$ ומדרגה 1, כך ש- $n>1$ לכן A לא מדרגה מלאה כלומר היא לא הפיכה ולכן 0 הוא ערך עצמי של A. נמצא ריבוי גיאומטרי של 0: $n-r(0I-A)=n-r(A)=n-1$.
מאחר ו- A לכסינה הרי שלכל ערך עצמי הריבוי האלגברי שווה לריבוי הגיאומטרי ולכן הריבוי האלגברי של 0 גם הוא $n-1$. אבל A מסדר $n\times n$ לכן יש ל- A ערך עצמי נוסף ששונה מ- 0 מריבוי אלגברי 1. נסמן אותו ב- λ. לפי משפט סכום כל הערכים העצמיים של A שווה לעיקבה של A ולכן: $trace(A)=\underbrace{0+0+...+0}_{n-1}+\lambda=\lambda\neq 0$ וקיבלנו $trace(A)\neq 0$ כנדרש.

דרך אחרת: נתון ש- A לכסינה ולכן A דומה למטריצה אלכסונית D. מאחר ו- D אלכסונית, כאשר איבר אלכסון הוא 0 אז כל השורה מתאפסת ולכן הדרגה של D שווה למספר איברי האלכסון של D השונים מ- 0. מאחר ולמטריצות דומות יש אותה דרגה הרי שגם הדרגה של D שווה ל- 1 ולכן יש ל- D איבר אחד באלכסון ששונה מ- 0 וכל השאר הם 0. מכאן כי $trace(D)=\underbrace{0+0+...+0}_{n-1}+\lambda=\lambda\neq 0$. אבל למטריצות דומות יש אותה עיקבה ולכן גם $trace(A)\neq 0$.

ג. תחילה נזכור כי מעל R מתקיים: $\langle u,v\rangle=\overline{\langle v,u\rangle}=\langle v,u\rangle$. עתה נפתח את אגף שמאל:

$$\|u+v\|^2=\langle u+v\ ,\ u+v\rangle=\langle u\ ,\ u+v\rangle+\langle v\ ,\ u+v\rangle=$$
$$=\langle u\ ,\ u\rangle+\langle u\ ,\ v\rangle+\langle v\ ,\ u\rangle+\langle v\ ,\ v\rangle=\|u\|^2+2\langle u\ ,\ v\rangle+\|v\|^2$$

ולכן נקבל ש $\|u+v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2$ אם"ם $2\langle u\ ,\ v\rangle=0$ או אם"ם $\langle u\ ,\ v\rangle=0$ כלומר אם"ם $u\ ,\ v$ אורתוגונליים.

<u>שאלה מס' 4</u> : (10 נקודות) שאלת שיעורי בית

הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמא נגדית את הטענות הבאות:

א. (5 נק') תהי A מטריצה ממשית מסדר $m\times n$. אם עמודות A פורשות את R^m אז שורות A פורשות את R^n.

ב. (5 נק') תהי A מטריצה ממשית מסדר $m\times n$. אם עמודות A הן בסיס ל R^m אז שורות A הן בסיס ל- R^n.

<u>פתרון שאלה מס' 4</u>:

א. **הטענה לא נכונה**. ניקח למשל מטריצה מסדר 2×3 ומדרגה 2. כיוון שמימד מרחב העמודות של A שווה לדרגה שלה הרי שמימד מרחב העמודות שווה ל- 2 כמו מימד המרחב כולו לכן עמודות A פורשות את R^2. לעומת זאת מימד מרחב השורות של A אף הוא 2 ששונה מהמימד של R^3 ולכן קבוצה זו לא פורשת את R^3. מטריצה לדוגמא: $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$. מתקיים:

$$R^3 \neq Row(A) = span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\} \text{ אבל } R^2 = Col(A) = span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

ב. **טענה נכונה**. נשים לב שהפעם נתון בסיס כלומר הקבוצה הפורשת היא גם בלתי תלויה ולכן הטענה נכונה. נתון כי עמודות A הן בסיס ל R^m ולכן דרגת המטריצה היא m (כי מימד מרחב העמודות שווה לדרגת המטריצה). מאחר וכל עמודה של A היא וקטור ב R^m הרי שבהכרח המטריצה היא בעלת m שורות כלומר $n=m$. קיבלנו כי A היא מטריצה ריבועית מסדר $m\times m$ ומדרגה m ולכן שורות A גם הן בסיס ל- $R^n \underset{n=m}{=} R^m$.

בשאלות 8-5 יש לסמן את התשובה הנכונה בטבלה (בכל שאלה רק תשובה אחת)

שאלה מס' 5: (5 נקודות)

יהי V מרחב ווקטורי מעל R ויהי $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ בסיס של V.

תהי $T:V\to V$ העתקה ליניארית המקיימת:

$$T(v_1)=2v_1+v_2$$
$$T(v_2)=v_1+7v_2+v_3$$
$$T(v_3)=-5v_2+2v_3$$

נסמן $A=[T]_B$ (המטריצה המייצגת את T לפי הבסיס B הנתון), אז סכום כל האיברים בשורה הראשונה של A^{-1} שווה ל-:

א. $\frac{1}{3}$; ב. $\frac{1}{2}$; ג. 3 ; ד. 2 ; ה. 1

פתרון שאלה מס' 5:

מהנתון, המטריצה A היא:

$$[T]_E=A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&7&-5\\0&1&2\end{pmatrix}$$

נשים לב כי A הפיכה וסכום של שורה של A שווה ל- 3 לכן לפי תרגיל ידוע סכום כל שורה של A^{-1} הוא $\frac{1}{3}$. ניתן גם לחשב ישירות את ההופכית או את השורה הראשונה של ההופכית ולחשב את הסכום.

שאלה מס' 6: (5 נקודות)

יהי $T:C^4\to C^4$ אופרטור לינארי. נתון כי:

(i) $KerT\cap \mathrm{Im}T\neq\{0\}$.

(ii) $\dim(\mathrm{Im}T)>\dim(KerT)$.

אזי $\dim(\mathrm{Im}T+KerT)$ שווה ל:

א. 4 ; ב. 3 ; ג. 2 ; ד. 1 ; ה. 0

פתרון שאלה מס' 6:

לפי משפט המימדים הראשון נקבל:

$\dim(\mathrm{Im}T+KerT)=\dim(\mathrm{Im}T)+\dim(KerT)-\dim(\mathrm{Im}T\cap KerT)$.

לפי משפט המימדים השני מתקיים: $\dim(\mathrm{Im}T)+\dim(KerT)=\dim V=4$. מהנתון $\dim(\mathrm{Im}T)>\dim(KerT)$ נובע כי האפשרויות היחידות הן $\dim(\mathrm{Im}T)=4$, $\dim(KerT)=0$ או $\dim(\mathrm{Im}T)=3$, $\dim(KerT)=1$.

מהנתון $KerT \cap \mathrm{Im}T \neq \{0\}$ נובע כי $\dim(KerT) \neq 0$ ולכן נשארה רק האפשרות:
$\dim(KerT)=1$, $\dim(\mathrm{Im}T)=3$. מאחר ו $KerT \cap \mathrm{Im}T \subset KerT$ הרי ש-
$0<\dim(KerT \cap \mathrm{Im}T) \leq \dim KerT = 1$ ולכן $KerT \cap \mathrm{Im}T = 1$. נציב עתה במשפט המימדים הראשון ונקבל:

$$\dim(\mathrm{Im}T + KerT) = \dim(\mathrm{Im}T) + \dim(KerT) - \dim(\mathrm{Im}T \cap KerT) = 3+1-1=3$$

לכן, התשובה הנכונה היא 3.

שאלה מס' 7: (5 נקודות)

תהי A מטריצה מסדר 4×4. נתון כי

(i) $rank(A)=2$.

(ii) $\det(2A-6I)=0$.

(iii) $rank(A+5I)<4$.

אזי

א. A לא לכסינה ו- $trace(A)=-2$.

ב. A לכסינה ו- $trace(A)=-2$.

ג. A לא לכסינה ו- $trace(A)=1$.

ד. A לכסינה ו- $trace(A)=1$.

ה. לא ניתן לקבוע מהנתונים אם A לכסינה או לא לכסינה.

פתרון שאלה מס' 7:

לפי הנתון הראשון A לא מדרגה מלאה לכן 0 הוא ערך עצמי שלה מריבוי גיאומטרי:
$n-r(0I-A)=4-r(A)=4-2=2$ לכן הריבוי האלגברי של 0 הוא לפחות 2.
מהנתון השני נקבל: $|2A-6I|=|2(A-3I)|=2^4|A-3I|=0$ כלומר $|A-3I|=0$ לכן גם 3 ערך עצמי של A מריבוי אלגברי לפחות 1. מהנתון השלישי נובע כי למטריצה $A+5I$ אין דרגה מלאה כלומר $|A+5I|=0$ ולכן גם -5 ערך עצמי של A מריבוי אלגברי לפחות 1. עד כה מצאנו 4 ערכים עצמיים (לאו דווקא שונים) של A (שהם $0,0,3,-5$) ו- A היא מסדר 4×4 לכן מצאנו את כולם ובנוסף בהכרח התקבל כי לכל ערך עצמי השונה מ- 0 הריבוי אלגברי הוא 1 ולכן גם הריבוי הגיאומטרי הוא 1 וכן הריבוי האלגברי של 0 יצא 2. מכאן כי לכל ערך עצמי של A הריבוי האלגברי שווה לריבוי הגיאומטרי שלו ולכן התשובה הנכונה היא **ש- A לכסינה ובנוסף** $trace(A)=0+0+3-5=-2$.

<u>שאלה מס' 8</u> : (5 נקודות)

יהי $V=C^2$ מעל C עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית: לכל $v=(b_1\ ,\ b_2)$, $u=(a_1\ ,\ a_2)$,

$$\langle u,v\rangle = a_1\bar{b}_1 + a_2\bar{b}_2$$

ויהי $B=\{v_1\,,\,v_2\}$ בסיס אורתונורמלי סדור של V כאשר $v_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1\,,i)$, $v_1=\frac{1}{2}(1+i\ ,\ 1-i)$. יהי

$w=(3,4)$ ויהי $[w]_B=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}$. אז:

א. $\alpha_1=\frac{7-i}{2}$; ב. $\alpha_1=\frac{3+4i}{\sqrt{2}}$; ג. $\alpha_1=\frac{3-4i}{\sqrt{2}}$; ד. $\alpha_1=\frac{7+i}{2}$; ה. $\alpha_1=\frac{7-7i}{\sqrt{2}}$

<u>פתרון שאלה מס' 8</u> :

לפי משפט, אם נתון בסיס אורתונורמאלי $B=\{v_1,...,v_n\}$ של מרחב וקטורי V מעל R ו- $w\in V$

וקטור כלשהו כך ש $[w]_B=(\alpha_1,...,\alpha_n)$ אז מתקיים $\alpha_j=\langle w,v_j\rangle$ לכן: $\alpha_1=\langle w,v_1\rangle$. **נציב ונקבל:**

$$\alpha_1=\left\langle (3,4),\frac{1}{2}\cdot(1+i,1-i)\right\rangle = 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\overline{(1+i)}+4\cdot\frac{1}{2}\cdot\overline{(1-i)}=\frac{3}{2}\cdot(1-i)+\frac{4}{2}\cdot(1+i)=$$

$$\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i+2+2i=\frac{3-3i+4+4i}{2}=\frac{7+i}{2}$$